تمارين و مشكلات

التمرين 1

ما هو باقي قسمة كل من الأعداد الآتية على 3 :

$(4111)^{1830}$, 4^{2007} , 2^{1954} , $4.7^n - 8$ حيث n عدد طبيعي .

التمرين 2

ما هو باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من الأعداد الآتية :

2018^{645} , $(19)^{522} \times (23)^{987}$, $863^{1800} \times 8030^{1260}$

التمرين 3

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $10^{3n} \equiv 1[37]$

ثم استنتج باقي قسمة العدد : $10^{30} + 10^{20} + 10^{10}$ على 37 .

التمرين 4

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

1) $n^7 \equiv n[7]$ 2) $n(n^2-1) \equiv 0[3]$

3) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$ 4) $3^{2n+2} - 2^{n+1} \equiv 0[7]$

التمرين 5

ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 7^n على 9 .

ما هو باقي قسمة $(56212)^{1954}$ على 9.

– عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها:

$$16^{3n} + 16^n - 2 \equiv 0[9]$$

التمرين 6

ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 3^n على 11 ثم استنتج باقي قسمة العدد $5^n - 3^n$ على 11 . عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها :

$$5^n - 3^n - 16 \equiv 0[11]$$

التمرين 7

عين قيم العدد الصحيح x في كل حالة مما يلي :

1) $3x \equiv 4[7]$ 2) $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$

3) $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$

التمرين 8

عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n^2 - 3n + 12 \equiv 0[n-2]$

التمرين 9

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة لكل من 2^n و 3^n على 7 .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

3) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $9^{2p+1} - 2^{2p+1} \equiv 0[7]$

4) حدد قيم n بحيث : $3^n \equiv 2^n [7]$

التمرين 10

اكتب الأعداد الآتية و المكتوبة في النظام العشري في النظام ذو الأساس 4 . 1961 , 1989 , 1418

ثم استنتج كتابتها في النظام الثنائي .

التمرين 11

حول إلى النظام الذي أساسه 11 الأعداد التالية :

$\overline{10141}^{5}$, $\overline{101010}^{2}$, 8945 , $\overline{15672}^{8}$

التمرين 12

نعتبر العدد A الذي يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 7 على الشكل:

$A=\overline{63x4}$

عين العدد الطبيعي x بحيث يكون A قابلا للقسمة على 6 .

التمرين 13

العدد N يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 17

على الشكل : $N=\overline{342x}$

عين العدد x بحيث يكون N قابلا للقسمة على 12 .

التمرين 14

1 – ادرس بواقي قسمة 4^n على 7 .

2 – يكتب العدد N على الشكل : $\overline{13321}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 .

ما هو باقي قسمة N على 7 .

التمرين 15

في أي نظام تعداد لدينا المساواة : $\overline{13121}=\overline{103}\times\overline{122}$

التمرين 16

في أي نظام تعداد يكون لدينا : $\overline{21054}=\left(\overline{132}\right)^2$

التمرين 17

يكتب العددان A و B في نظام مجهول على الشكل :

$B=\overline{402}$ ، $A=\overline{302}$

و يكتب العدد $A\times B$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 على الشكل :

$\overline{75583}$.

ما هو أساس نظام التعداد الأول .

التمرين 18

يكتب العدد 12551 في نظام تعداد مجهول عل الشكل $\overline{30407}$ ما هو أساس هذا النظام .

التمرين 19

أنجز العمليات التالية في نظام التعداد الذي أساسه 2 :

$\overline{11111}+\overline{11110}$, $\overline{100111}+\overline{101011}$

$\overline{11100}\times\overline{10001}$, $\overline{1101}\times\overline{1111}$

التمرين 20

a,b,c أعداد طبيعية حيث $1<a\leq b\leq c$ عين a,b,c و الجداء abc
علما أن في نظام التعداد الذي أساسه a لدينا :
$bc=\overline{555}$ و $b+c=\overline{46}$.

الحلــول

التمرين 1

تعيين بواقي القسمة على 3 :

– لدينا $4111\equiv 1[3]$ و منه $(4111)^{1830}\equiv (1)^{1830}[3]$
و عليه : $(4111)^{1830}\equiv 1[3]$
– لدينا : $4\equiv 1[3]$ و عليه : $(4)^{2007}\equiv (1)^{2007}[3]$
إذن : $4^{2007}\equiv 1[3]$
– لدينا: $2^{1954}=\left(2^2\right)^{977}$ و منه : $2^{1954}=4^{977}$
لكن : $4\equiv 1[3]$ و عليه : $4^{977}\equiv 1[3]$ ومنه : $2^{1954}\equiv 1[3]$
–لدينا : $7\equiv 1[3]$ و عليه : $7^n\equiv (1)^n[3]$ إذن : $7^n\equiv 1[3]$
لكن $4\equiv 1[3]$ و عليه : $4.7^n\equiv 1[3]$
و لدينا : $8\equiv 2[3]$ و عليه : $4.7^n-8\equiv -1[3]$
لكن : $-1\equiv 2[3]$ و منه : $4.7^n-8\equiv 2[3]$

التمرين 2

تعيين بواقي القسمة على 7 :

– لدينا $2018\equiv 2[7]$ و عليه : $2018^{645}\equiv 2[7]$
إذن : $2018^{645}\equiv \left(2^3\right)^{216}[7]$ أي : $(2018)^{645}\equiv 8^{216}[7]$
لكن : $8\equiv 1[7]$ و عليه : $(2018)^{645}\equiv 1[7]$
– لدينا $19\equiv (-2)[7]$ و عليه : $(19)^{522}\equiv (-2)^{522}[7]$
أي أن $(19)^{522}\equiv 8^{174}[7]$ لكن : $8\equiv 1[7]$
و عليه : $(19)^{522}\equiv 1[7]...(1)$
و لدينا : $23\equiv 2[7]$ و عليه : $(23)^{987}\equiv 2^{987}[7]$
ومنه : $(23)^{987}\equiv \left(2^3\right)^{329}[7]$ و عليه : $(23)^{987}\equiv 8^{329}[7]$
لكن : $8\equiv 1[7]$ و عليه : $(23)^{987}\equiv 1[7]...(2)$
من (1) و (2) : $(19)^{522}\times(23)^{987}\equiv 1[7]$
– لدينا : $8030\equiv 1[7]$ و منه : $(8030)^{1260}\equiv 1[7]$
$863\equiv 2[7]$ و منه : $(863)^{1800}\equiv 2^{1800}[7]$
إذن : $(863)^{1800}\equiv \left(2^3\right)^{600}[7]$ أي : $(863)^{1800}\equiv 8^{600}[7]$
و عليه : $(863)^{1800}\equiv 1[7]$ لأن : $8\equiv 1[7]$
و بالتالي: $(863)^{1800}\times(8030)^{1260}\equiv 1[7]$

التمرين 3

– إثبات أن $10^{3n}\equiv 1[37]$:
لدينا : $10^{3n}\equiv \left(10^3\right)^n[37]$ أي : $10^{3n}\equiv (1000)^n[37]$
لكن : $1000\equiv 1[37]$ و منه : $10^{3n}\equiv 1^n[37]$
أي : $10^{3n}\equiv 1[37]$
– استنتاج باقي قسمة $10^{30}+10^{20}+10^{10}$ على 37 :

$$10^{10}+10^{20}+10^{30}=10^{10}\left(1+10^2+10^3\right)$$

لدينا : $10^3\equiv 1[37]$ و $10^{10}\equiv 10^{3\times 3+1}[37]$

و منه : $10^{10}\equiv 10^{3\times 3}\times 10[37]$ و عليه : $10^{10}\equiv 10[37]$

و منه : $10^{10}+10^{20}+10^{30}\equiv 10\left(1+10^2+1\right)[37]$

أي : $10^{10}+10^{20}+10^{30}\equiv 10\left(1+10^3+10\right)[37]$

و بالتالي: $10^{10}+10^{20}+10^{30}\equiv 21[37]$ لأن : $10^3\equiv 1[37]$

التمرين 4

1) نبرهن أن $n^7\equiv n[7]$:

– من أجل $n\equiv 0[7]$ فإن : $n^7\equiv 0[7]$ و عليه : $n^7\equiv n[7]$

– من أجل $n\equiv 1[7]$ فإن : $n^7\equiv 1[7]$ و عليه : $n^7\equiv n[7]$

– من أجل $n\equiv 2[7]$ فإن : $n^7\equiv 2^7[7]$ و عليه : $n^7\equiv n[7]$

– من أجل $n\equiv 3[7]$ فإن : $n^7\equiv 3^7[7]$ و عليه : $n^7\equiv n[7]$

– من أجل $n\equiv 4[7]$ فإن : $n^7\equiv 4^7[7]$ و عليه :

$n^7\equiv 16384[7]$ أي أن : $n^7\equiv 4[7]$ إذن : $n^7\equiv n[7]$

– من أجل $n\equiv 5[7]$ فإن : $n^7\equiv 5^7[7]$ و عليه :

$n^7\equiv 78125[7]$ و منه : $n^7\equiv 5[7]$ و عليه : $n^7\equiv n[7]$

– من أجل $n\equiv 6[7]$ فإن : $n^7\equiv 6^7[7]$

و عليه : $n^7\equiv 279936[7]$ و منه : $n^7\equiv 6[7]$

و عليه : $n^7\equiv n[7]$

و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^7\equiv n[7]$

2) نبرهن أن : $n\left(n^2-1\right)\equiv 0[3]$:

– من أجل $n\equiv 0[3]$: $n^2\equiv 0[3]$ و منه : $n^2-1\equiv -1[3]$

و عليه : $n\left(n^2-1\right)\equiv 0[3]$

– من أجل $n\equiv 1[3]$: $n^2\equiv 1[3]$ و منه : $n^2-1\equiv 0[3]$

و عليه : $n\left(n^2-1\right)\equiv 0[3]$

– من أجل $n\equiv 2[3]$: $n^2\equiv 1[3]$ و منه : $n^2-1\equiv 0[3]$

و عليه : $n\left(n^2-1\right)\equiv 0[3]$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $n\left(n^2-1\right)\equiv 0[3]$

3) نبرهن أن : $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0[17]$

لدينا : $2^{3n+1}=2^{3n}.2$ و عليه : $2^{3n+1}=\left(2^3\right)^n\times 2$

إذن : $2^{3n+1}=8^n\times 2$ و عليه : $2^{3n+1}\equiv 2\times 8^n[17]...(1)$

و لدينا : $3\times 5^{2n+1}=3\times 5^{2n}\times 5$

$$=15\times\left(5^2\right)^n=15\times(25)^n$$

بما أن : $15\equiv -2[17]$ و $25\equiv 8[17]$ فإن :

$$3\times 5^{2n+1}\equiv -2\times 8^n[17]...(2)$$

من (1) و (2) : $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0[17]$

4) نبرهن أن : $3^{2n+2}-2^{n+1}\equiv 0[7]$

لدينا : $3^{2n+2}=3^{2n}\times 3^2$ و منه : $3^{2n+2}=\left(3^2\right)^n\times 9$

إذن : $3^{2n+2}=9^n\times 9$ أي : $3^{2n+2}=9^{n+1}$

لكن : $9\equiv 2[7]$ و عليه : $3^{2n+2}\equiv 2^{n+1}[7]$

و منه : $3^{2n+2}-2^{n+1}\equiv 0[7]$

التمرين 5

- دراسة بواقي قسمة 7^n على 9 :

$7^0\equiv 1[9]$, $7^1\equiv 7[9]$, $7^2\equiv 4[9]$, $7^3\equiv 1[9]$

بما أن : $7^3\equiv 1[9]$ فإن : $7^{3k}\equiv 1[9]$ من أجل كل عدد طبيعي k

و عليه : $7^{3k}.7\equiv 1.7[9]$ أي : $7^{3k+1}\equiv 7[9]$

و كذلك $7^{3k+1}.7\equiv 7\times 7[9]$ و منه : $7^{3k+2}\equiv 4[9]$

إذن بواقي قسمة 7^n على 9 هي :1،7،4 .

لما $n=3k$ الباقي هو : 1

لما $n=3k+1$ الباقي هو : 7

لما $n=3k+2$ الباقي هو : 4

- تعيين باقي قسمة $(56212)^{1954}$ على 9 :

لدينا : $56212=7[9]$ و منه : $(56212)^{1954}=7^{1954}[9]$

لكن : $1954=3\times 651+1$ و عليه : $7^{1954}\equiv 7[9]$

و عليه : $(56212)^{1954}=7[9]$

- تعيين n بحيث : $16^{3n}+16^n-2\equiv 0[9]$

لدينا : $16\equiv 7[9]$ و منه : $7^{3n}+7^n-2\equiv 0[9]$

لكن : $7^{3n}\equiv 1[9]$ و عليه : $7^n-1\equiv 0[9]$ إذن : $7^n\equiv 1[9]$

و عليه: $n=3k$ حيث : $k\in\mathbb{N}$

التمرين 6

- بواقي قسمة 5^n على 11 :

$5^0\equiv 1[11]$; $5^1\equiv 5[11]$; $5^2\equiv 3[11]$; $5^3\equiv 4[11]$

$5^4\equiv 9[11]$; $5^5\equiv 1[11]$

لدينا : $5^5\equiv 1[11]$ و عليه : $5^{5k}\equiv 1[11]$ حيث : $k\in\mathbb{N}$

و بالتالي : $5^{5k+1}\equiv 5[11]$ ، $5^{5k+2}\equiv 3[11]$ ، $5^{5k+3}\equiv 4[11]$ ،

$5^{5k+4}\equiv 9[11]$.

إذن البواقي هي : 1،5،3،4،9 حسب قيم n و هي :

$5k$ ، $5k+1$ ، $5k+2$ ، $5k+3$، $5k+4$ على الترتيب .

- بواقي قسمة 3^n على 11 :

$3^0\equiv 1[11]$; $3^1\equiv 3[11]$; $3^2\equiv 9[11]$; $3^3\equiv 5[11]$

$3^4\equiv 4[11]$; $3^5\equiv 1[11]$

لدينا : $3^5\equiv 1[11]$ و عليه : $3^{5k}\equiv 1[11]$ حيث : $k\in\mathbb{N}$

و بالتالي : $3^{5k+1}\equiv 3[11]$ ، $3^{5k+2}\equiv 9[11]$ ، $5^{5k+3}\equiv 5[11]$ ،

$5^{5k+4}\equiv 4[11]$. إذن البواقي هي: 1 ، 3 ، 9 ، 5 ، 4 حسب قيم n

و هي: $5k$ ، $5k+1$ ، $5k+2$، $5k+3$، $5k+4$ على الترتيب.

- استنتاج باقي قسمة 5^n-3^n على 11 :

* من أجل $n=5k$: $5^n-3^n\equiv 0[11]$
* من أجل $n=5k+1$: $5^n-3^n\equiv 2[11]$
* من أجل $n=5k+2$: $5^n-3^n\equiv -6[11]$

أي: $5^n-3^n\equiv 5[11]$

* من أجل $n=5k+3$: $5^n-3^n\equiv -1[11]$

و عليه : $5^n - 3^n \equiv 10[11]$

* من أجل $n = 5k + 4$: $5^n - 3^n \equiv 5[11]$

– تعيين n بحيث : $5^n - 3^n - 16 \equiv 0[11]$

أي : $5^n - 3^n \equiv 16[11]$ و عليه : $5^n - 3^n \equiv 5[11]$

مما سبق : $n \equiv 5k + 2$ ، $k \in \mathbb{N}$

التمرين 7

1) تعيين x بحيث : $3x \equiv 4[7]$

لدينا : $4 \equiv -3[7]$ و عليه : $3x \equiv -3[7]$

و منه : $3x + 3 \equiv 0[7]$ و بالتالي : $3(x+1) \equiv 0[7]$

و منه : $x + 1 \equiv 0[7]$ لأن : 3 و 7 أوليان فيما بينهما .

إذن : $x \equiv -1[7]$ أي : $x \equiv 6[7]$

و عليه : $x \equiv 7\alpha + 6$ مع $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2)لدينا : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$ لكن : $-3 \equiv 4[7]$

و عليه : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$ تكافئ : $x^2 + 4x + 4 \equiv 0[7]$

و منه : $(x+2)^2 \equiv 0[7]$ و بالتالي : $x + 2 \equiv 0[7]$

إذن : $x \equiv -2[7]$ و عليه : $x \equiv 5[7]$

إذن : $x = 7\alpha + 5$ و $\alpha \in \mathbb{Z}$.

3) لدينا : $\begin{cases} x \equiv 3[5] ...(1) \\ x \equiv 1[6] ...(2) \end{cases}$

من (1) : $x = 5\alpha + 3$ وَ $\alpha \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في (2) نجد :

$5\alpha + 3 \equiv 1[6]$ و عليه : $5\alpha \equiv -2[6]$

لكن : $5 \equiv -1[7]$ و منه : $5\alpha \equiv -\alpha[6]$

و عليه : $-\alpha \equiv -2[6]$ أي أن : $\alpha \equiv 2[6]$

و منه : $\alpha = 6\beta + 2$ و بالتالي : $x = 5(6\beta + 2) + 3$

إذن: $x = 30\beta + 13$ ، $\beta \in \mathbb{Z}$

التمرين 8

تعيين n بحيث : $n^2 - 3n + 12 \equiv 0[n-2]$

لدينا : $n^2 - 3n + 12 = n^2 - 2n - n + 12$

$$= n(n-2) - n + 2 + 10$$
$$= n(n-2) - (n-2) + 10$$
$$= (n-1)(n-2) + 10$$

لكن : $(n-1)(n-2) \equiv 0[n-2]$

و عليه : $n^2 - 3n + 12 \equiv 10[n-2]$

لكن : $n^2 - 3n + 12 \equiv 0[n-2]$ و عليه : $10 \equiv 0[n-2]$

إذن : $n-2$ تقسم 10 . و عليه : $n - 2 \in \{1 ; 2 ; 5 ; 10\}$

إذن: $n \in \{3 ; 4 ; 7 ; 12\}$

التمرين 9

1 – دراسة بواقي قسمة 2^n على 7 :

$2^0 \equiv 1[7]$; $2^1 \equiv 2[7]$; $2^2 \equiv 4[7]$ $2^3 \equiv 1[7]$;

لدينا : $2^3 \equiv 1[7]$ و عليه : $2^{3\alpha} \equiv 1[7]$ و $2^{3\alpha+1} \equiv 2[7]$

و $2^{3\alpha+2} \equiv 4[7]$ حيث α عدد صحيح .

– دراسة بواقي قسمة 3^n على 7 :

$$3^0 \equiv 1[7] \;;\; 3^1 \equiv 3[7] \;;\; 3^2 \equiv 2[7] \;\; 3^3 \equiv 6[7];$$

$$3^4 \equiv 4[7] \;;\; 3^5 \equiv 5[7] \;;\; 3^6 \equiv 1[7]$$

لدينا : $3^6 \equiv 1[7]$ و عليه : $3^{6\beta} \equiv 1[7]$

و منه : $3^{6\beta+1} \equiv 3[7]$ و $3^{6\beta+2} \equiv 2[7]$ و $3^{6\beta+3} \equiv 6[7]$

و $3^{6\beta+4} \equiv 4[7]$ و $3^{6\beta+5} \equiv 5[7]$ حيث β عدد صحيح .

2– نبين أن : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

لدينا : $3^{2n} = \left(3^2\right)^n$ و عليه : $3^{2n} = 9^n$

و بما أن : $9 \equiv 2[7]$ فإن : $9^n \equiv 2^n[7]$

و منه : $3^{2n} \equiv 2^n[7]$ و بالتالي : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

3– نبين أن : $9^{2p+1} - 2^{2p+1} \equiv 0[7]$

أي: $\left(3^2\right)^{2p+1} - 2^{2p+1} \equiv 0[7]$

بوضع : $2p+1 = n$ نجد : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

و هو محقق من السؤال السابق .

4– تحديد n بحيث : $3^n \equiv 2^n[7]$

توحيد الدور :

لدينا: $2^{3\alpha} \equiv 1[7]$ و عليه: $\left(2^{3\alpha}\right)^2 \equiv 1^2[7]$ و عليه:

$2^{6\alpha} \equiv 1[7]$ و منه: $2^{6\alpha+1} \equiv 2[7]$ ؛ $2^{6\alpha+2} \equiv 4[7]$

$2^{6\alpha+3} \equiv 1[7]$ ؛ $2^{6\alpha+4} \equiv 2[7]$ ؛ $2^{6\alpha+5} \equiv 4[7]$

بما أن: $3^n \equiv 2^n[7]$ فإن: $n = 6p$ حيث: $p \in \mathbb{N}$.

التمرين 10

– كتابة الأعداد في النظام ذي الأساس 4 :

* العدد 1961 : $1961 = 490 \times 4 + 1$

$$490 = 122 \times 4 + 2$$
$$122 = 30 \times 4 + 2$$
$$30 = 7 \times 4 + 2$$
$$7 = 1 \times 4 + 3$$
$$1 = 0 \times 4 + 1$$

إذن 1961 يكتب : $\overline{132221}^{4}$

* العدد 1989 : $1989 = 497 \times 4 + 1$

$$497 = 124 \times 4 + 1$$
$$124 = 31 \times 4 + 0$$
$$31 = 7 \times 4 + 3$$
$$7 = 1 \times 4 + 3$$
$$1 = 0 \times 4 + 1$$

إذن 1989 يكتب : $\overline{133011}^{4}$

* العدد 1418 : $1418 = 202 \times 7 + 4$

$$202 = 28 \times 7 + 6$$
$$28 = 4 \times 7 + 0$$
$$4 = 0 \times 7 + 4$$

إذن 1418 يكتب : $\overline{4064}^{4}$

– استنتاج الكتابة في النظام الثنائي :

$$1961 = 1\times 4^0 + 2.4^1 + 2.4^2 + 2.4^3 + 3.4^4 + 1.4^5$$
$$= 1 + 2\left(2^2\right)^1 + 2\left(2^2\right)^2 + 2\left(2^2\right)^3 + \left(1+2\right)\left(2^2\right)^4 + 1.\left(2^2\right)^5$$
$$= 2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$$
$$= 1.2^0 + 1.2^3 + 1.2^5 + 1.2^7 + 1.2^8 + 1.2^9 + 1.2^{10}$$

و عليه 1961 يكتب : $\overline{11110101001}^{2}$

$$1418 = 4.4^0 + 6.4^1 + 0.4^2 + 4.4^3$$
$$= 2^2 + \left(2+2^2\right).2^2 + 2^2.\left(2^2\right)^3$$
$$= 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^8$$
$$= 1.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 + 1.2^8$$

و عليه : 1418 يكتب : $\overline{100011100}^{2}$

التمرين 11

– نحول $A = \overline{10141}^{5}$ إلى النظام العشري :

$$A = 1.5^0 + 4.5^1 + 1.5^2 + 0.5^3 + 1.5^4$$
$$A = 1 + 20 + 25 + 625$$
$$A = 671$$

نكتب 671 في نظام التعداد الذي أساسه 11 :

$$671 = 61\times 11 + 0$$
$$61 = 5\times 11 + 6$$
$$5 = 0\times 11 + 5$$

إذن 671 يكتب : $\overline{560}^{11}$

– نحول $B = \overline{101010}^{2}$ إلى النظام العشرى :

$$B = 0.2^0 + 1.2^1 + 0.2^2 + 1.2^3 + 0.2^4 + 1.2^5 = 42$$

نكتب 42 في النظام الذي أساسه 11 :

$$42 = 3\times 11 + 9$$
$$3 = 0\times 11 + 3$$

إذن 42 يكتب $\overline{39}^{11}$

– نكتب 8945 في النظام الذي أساسه 11 :

$$8945 = 813\times 11 + 2$$
$$813 = 73\times 11 + 10$$
$$73 = 6\times 11 + 7$$
$$6 = 0\times 11 + 6$$

و منه 8945 يكتب $\overline{67\alpha 2}^{11}$ حيث : $\alpha = 10$

– نكتب $C = \overline{15672}^{8}$ في النظام العشري :

$$C = 2.8^0 + 7.8^1 + 6.8^2 + 5.8^3 + 1.8^4$$
$$= 2 + 56 + 384 + 2560 + 4096$$
$$= 7098$$

نحول C من النظام العشري إلى النظام الذي أساسه 11 :

$$7098 = 645\times 11 + 3$$
$$645 = 58\times 11 + 7$$

$$58=5\times 11+3$$

$$5=0\times 11+5$$

و عليه C يكتب : $\overline{5373}^{11}$.

التمرين 12

تعيين x : $A=\overline{63x4}^{7}$

و منه : $0\le x\le 6$

و بالتالي A يكتب : $A=4.7^0+x.7^1+3.7^2+6.7^3$

و عليه : $A=4+x.7+3.7^2+6.7^2$

لدينا : $7\equiv 1[6]$ و منه : $7^2\equiv 1[6]$ و $7^3\equiv 1[6]$

و بالتالي : $A\equiv 4+x+3+6[6]$ أي : $A\equiv 1+x[6]$

بما أن: $A\equiv 0[6]$ فإن : $1+x\equiv 0[6]$

و عليه : $x\equiv -1[6]$ أي : $x\equiv 5[6]$ لأن : $-1\equiv 5[6]$

و عليه : $x=5$ لأن : $0\le x\le 6$.

التمرين 13

تعيين x : $N=\overline{342x}^{17}$

و بالتالي N يكتب :

$$N=x.17^0+2.17^1+4.17^2+3.17^3$$

إذن : $0\le x\le 16$ و $N=x+2.17^1+4.17^2+3.17^3$

لدينا : $17\equiv 5[12]$ و منه : $17^2\equiv 5^5[12]$

إذن : $17^2\equiv 1[12]$ و عليه : $17^3\equiv 5[12]$

و عليه : $N\equiv x+10+4+15[12]$

$N\equiv x+29[12]$ أي أن : $N\equiv x+5[12]$

تكون : $N\equiv 0[12]$ إذا كان : $x+5\equiv 0[12]$

أي : $x\equiv -5[12]$ أي : $x\equiv 7[12]$

و عليه : $x=12\alpha+7$ و $\alpha\in\mathbb{Z}$

لكن : $0\le x\le 16$ و منه : $0\le 12\alpha+7\le 16$

أي : $-7\le 12\alpha\le 9$ و منه : $-0,58\le\alpha\le 0,75$

و عليه : $\alpha=0$ و منه : $x=7$.

التمرين 14

1 -دراسة بواقي قسمة 4^n على 7 :

$$4^0\equiv 1[7]\ ;\ 4^1\equiv 4[7]\ ;\ 4^2\equiv 2[7]\ ;\ 4^3\equiv 1[7]$$

و منه: $4^{3\alpha}\equiv 1[7]$ و عليه : $4^{3\alpha+1}\equiv 4[7]$ و $4^{3\alpha+2}\equiv 2[7]$

2 – تعيين باقي قسمة N على 7 :

لدينا : $N=1.4^0+2.4^1+3.4^2+3.4^3+1.4^4$

ومنه : $N\equiv 1+2(4)+3(2)+3(1)+(4)[7]$

أي : $N\equiv 22[7]$ إذن : $N\equiv 1[7]$

و منه باقي القسمة هو 1 .

التمرين 15

– نفرض x هو أساس هذا النظام فيكون :

$$\left(2.x^0+2.x^1+1.x^2\right)\times\left(3.x^0+0.x^1+1.x^2\right)$$

$$=\left(1.x^0+2.x^1+1.x^2+3.x^3+1.x^4\right)$$

حيث : $x \geq 4$ و عليه :

$$\left(2+2x+x^2\right)\left(3+x^2\right)=\left(1+2x+x^2+3x^3+x^4\right)$$

وعليه :

$$6+2x^2+6x+2x^3+3x^2+x^4=1+2x+x^2+3x^3+x^4$$

و بالتالي : $-x^3+4x^2+4x+5=0$

نلاحظ أن 5 حل خاص و عليه المعادلة تكافئ :

$$(x-5)\left(-x^2-x-1\right)=0$$

و منه إما : $x-5=0$ أو : $-x^2-x-1=0$

حل المعادلة : $-x^2-x-1=0$

لدينا : $\Delta=-3$ و منه ليس للمعادلة حل . إذن : $x=5$.

التمرين 16

نفرض x هو أساس هذا النظام فيكون :

$$\left(2+3.x+1.x^2\right)^2=4+5x+0.x^2+1.x^3+2.x^4$$

$$\left(x^2+3x+2\right)^2=4+5x+x^3+2x^4$$

$$x^4+6x^3+13x^2+12x+4=4+5x+x^3+2x^4$$

و منه : $-x^4+5x^3+13x^2+7x=0$

أي : $x\left(-x^3+5x^2+13x+7\right)=0$

إذن : $-x^3+5x^2+13x+7=0$ لأن : $x \geq 6$

نجد 7 حل خاص و منه المعادلة تكافئ :

$$(x-7)\left(-x^2-2x-1\right)=0$$

و منه إما : $x-7=0$ أو : $-x^2-2x-1=0$

نحل المعادلة : $-x^2-2x-1=0$

لدينا : $\Delta=0$ و منه للمعادلة حل مضاعف $x_0=-1$ مرفوض .

و عليه : $x=7$

التمرين 17

نفرض x هو أساس هذا النظام :

$$A=2.x^0+0.x^1+3.x^2=2+3x^2$$

$B=2.x^0+0.x^1+4.x^2=2+4x^2$ حيث : $x \geq 5$

لدينا من جهة : $AB=\left(2+3x^2\right)\left(2+4x^2\right)$

أي: $AB=4+8x^2+6x^2+12x^4$

$$AB=4+14x^2+12x^4$$

و من جهة أخرى :

$$AB=3.9^0+8.9^1+5.9^2+5.9^3+7.9^4$$

$$AB=3+72+405+3645+45927$$

$$AB=50052$$

و منه : $12x^4+14x^2+4=50052$

$$12x^4+14x^2-50048=0$$

بوضع : $x^2=y$ نجد : $12y^2+14y-50048=0$

لدينا : $\Delta'=(7)^2+50048\times 12$ أي: $\Delta'=600625=(775)^2$

للمعادلة حلين : $y_1 = \dfrac{-7-775}{12} = \dfrac{-782}{12}$ (مرفوض)

$y_2 = \dfrac{-7+775}{12} = 64$. و منه : $y = 64$

و منه : $x^2 = 64$ و عليه : $x = 8$.

التمرين 18

نفرض x هو أساس هذا النظام :

$$12551 = 7.x^0 + 0.x^1 + 4.x^2 + 0.x^3 + 3.x^4$$

$$12551 = 7 + 4x^2 + 3x^4 , x \geq 8$$

و منه : $3x^4 + 4x^2 - 12544 = 0$

بوضع : $y = x^2$ نجد : $3y^2 + 4y - 12544 = 0$

لدينا : $\Delta' = (2)^2 - (-12544)(3) = 37636 = (194)^2$

للمعادلة حلين هما :

$$y_1 = \frac{-2-194}{3} = \frac{-196}{3} \text{ (مرفوض)}$$

$y_2 = \dfrac{-2+194}{3} = 64$ و منه : $x^2 = 64$ و عليه : $x = 8$.

التمرين 19

انجاز العمليات :

$$\begin{array}{r} \overline{11110}^{2} \\ + \quad \overline{11111}^{2} \\ \hline = \overline{111101}^{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{101011}^{2} \\ + \quad \overline{100111}^{2} \\ \hline = \overline{1010010}^{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{10001}^{2} \\ \times \quad \overline{11100}^{2} \\ \hline 00000 \\ 00000\ . \\ 10001\ .\ . \\ 10001\ .\ .\ . \\ 10001\ .\ .\ .\ . \\ \hline \overline{111011100}^{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{1111}^{2} \\ \times \quad \overline{1101}^{2} \\ \hline 1111 \\ 0000\ . \\ 1111\ .\ . \\ 1111\ .\ .\ . \\ \hline \overline{11000011}^{2} \end{array}$$

التمرين 20

تعيين a , b , c ثم الجداء abc :

لدينا : $\overline{bc} = \overline{555}$ ، $b + c = \overline{46}$

و عليه : $(1)...\begin{cases} b + c = 6 + 4a \\ b.c = 5 + 5a + 5a^2 \end{cases}$

و منه b و c حلين لمعادلة في $\mathbb{N}$ من الشكل :

$$x^2 - (6 + 4a)x + 5a^2 + 5a + 5 = 0$$

أي : $(2)...\ x^2 - 2(3 + 2a)x + 5a^2 + 5a + 5 = 0$

لدينا : $\Delta' = (3 + 2a)^2 - (5a^2 + 5a + 5)$

و منه : $\Delta' = -a^2 + 7a + 4$

حتى تقبل هذه المعادلة حل يجب أن يكون $\Delta' \geq 0$

مميز Δ' هو : $\Delta_a = 49 + 16 = 65$

إذن Δ' له جذرين : $a_2 = \frac{-7+\sqrt{65}}{-2}$ ، $a_1 = \frac{-7-\sqrt{65}}{-2}$

a	$-\infty$		a_2		a_1		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$	0	$-$	

حيث : $a_1 \approx 7,5$ ، $a_2 \approx -0,53$

إذن من أجل $a_2 < a < a_1$ فإن : $\Delta' > 0$

و عليه المعادلة (2) تقبل حلا . لكن : $a \geq 7$

و عليه $a = 7$ هو حل للجملة (1) .

و المعادلة (2) تصبح : $x^2 - 34x + 285 = 0$ ؛ $\Delta' = 4$

للمعادلة حلين : $x_1 = \frac{17-2}{1} = 15$ ؛ $x_2 = \frac{17+2}{1} = 19$

و منه : $b = 15$ وَ $c = 19$ لأن : $b < c$

و منه : $abc = 7 \times 15 \times 19$ أي : $abc = 1995$.